Тема 1.2. Булевы функции

Каждая формула может рассматриваться как способ задания функции алгебры логики.

Определение. **Логической (булевой) функцией** называют функцию $A(x_1, x_2, ... x_n)$, аргументы которой $x_1, x_2, ... x_n$ (независимые переменные) и сама функция (зависимая переменная) принимают значение 0 или 1.

Логические функции могут быть заданы логичным способом или аналитически – в виде соответствующих формул.

Общее количество различных булевых функций от n аргументов равно 2^{2^n}.

Для n = 1 существует четыре различных булевых функции.

x	f_1	f_2	f_3	f_4
1	1	1	0	0
0	1	0	1	0

$f_1(x) \equiv 1, \quad f_2(x) \equiv x,$

$f_3(x) \equiv \bar{x}, \quad f_4(x) \equiv 0.$

Для n = 2 существует 16 различных булевых функций.

x	y	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0
1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0

$f_1(x, y) = 1 -$ константа «истина»;

$f_2(x, y) = x \vee y$ – дизъюнкция;

$f_3(x, y) = y \to x$ – обратная импликация;

$f_4(x, y) = x \to y$ – импликация;

$f_5(x, y) = \overline{x \wedge y}$ – отрицание конъюнкции;

$f_6(x, y) = x -$ функция равна первому аргументу;

$f_7(x, y) = x \leftrightarrow y$ – эквиваленция;

$f_8(x, y) = \bar{x}$ – отрицание первого аргумента;

$f_9(x, y) = \overline{x \leftrightarrow y}$ – отрицание эквивалента;

$f_{10}(x, y) = \bar{y}$ – отрицание второго аргумента;

$f_{11}(x,y)=y$ – функция равна второму аргументу;

$f_{12}(x,y)=\overline{x\vee y}$ – отрицание дизъюнкции;

$f_{13}(x,y)=\overline{y\to x}$ – отрицание обратной импликации;

$f_{14}(x,y)=\overline{x\to y}$ – отрицание импликации;

$f_{15}(x,y)=x\wedge y$ – конъюнкция;

$f_{16}(x,y)=0$ – константа «ложь».

С увеличением числа аргументов количество логических функций возрастает.

Всякая логическая формула определяет булеву функцию. В то же время для каждой булевой функции можно записать бесконечно много формул, ее представляющих. Одна из задач алгебры логики – нахождение канонических форм (т.е. формул, построенных по определенному правилу, канону), а также наиболее простых формул, представляющих булевы функции.

Дизъюнктивная и конъюнктивная нормальная форма.

Определение. Формула, в которую входят только операции конъюнкции, дизъюнкции и отрицания, причем операция отрицания относится непосредственно к высказывательным переменным, называется приведенной.

Пример:

1) $x\vee y\wedge \bar{z}$ - является приведенной;

2) $(x\vee y)\to z$ - не является приведенной, так как содержит операцию импликации;

3) $\overline{x\wedge y}\vee z$ - не является приведенной, так как операция отрицания отнесена к формуле $x\vee y$, а не к высказывательной переменной.

Для любой формулы алгебры высказываний путем равносильных преобразований можно получить приведенную формулу, например, $(x\vee y)\to z\equiv\overline{x\vee y}\vee z\equiv\bar{x}\wedge\bar{y}\vee\bar{z}$.

Пусть задана система высказывательных переменных $x_1,x_2,...x_n$ (1).

Определение. **Элементарной дизъюнкцией** высказывательных переменных из системы (1) называется дизъюнкция некоторых переменных этой системы или их отрицаний.

Определение. **Элементарной конъюнкцией** называется конъюнкция некоторых переменных этой системы или их отрицаний.

Например:

1) Пусть задана система x, y, z. Формулы $x,\ \overline{y},\ x \vee y,\ x \vee y \vee \overline{z}$ являются элементарными дизъюнкциями; первые две из них – одночленными.

2) $x,\ \overline{y},\ x \wedge y,\ x \wedge y \wedge \overline{z}$ – элементарными конъюнкциями.

Теорема 2.1. Элементарная дизъюнкция (элементарная конъюнкция) является тождественно истинной (тождественно явной) тогда и только тогда, когда она наряду с некоторой высказывательной переменной x_i содержит отрицание этой переменной $\overline{x_i}$.

Определение. Формула называется **дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ)**, если она является дизъюнкцией некоторого числа элементарных конъюнкций.

ДНФ можно записать в виде $A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$, где каждое A_i - элементарная дизъюнкция.

Например: $(x \wedge y) \vee (\overline{x} \wedge z)$; $(\overline{x} \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \overline{y} \wedge z) \vee (z \wedge \overline{y} \wedge \overline{z})$ – являются ДНФ.

Определение . Формула называется **конъюнктивной нормальной формой (КНФ)**, если она является конъюнкцией некоторого числа элементарных дизъюнкций.

Например: $x,\ \overline{y},\ z \vee y,\ (\overline{y} \vee z) \wedge (x \vee y \vee \overline{z}) \wedge (y \vee z)$ – является КНФ.

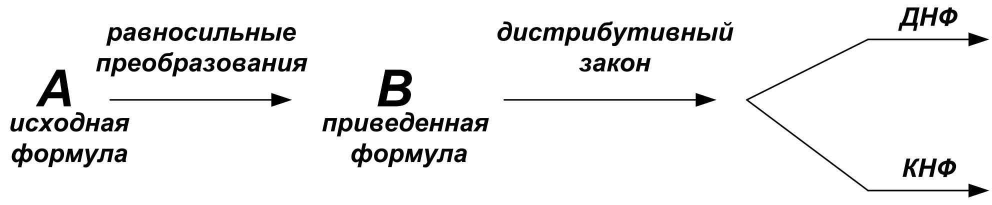
Теорема. КНФ (ДНФ) является тождественно истинной (тождественно ложной) тогда и только тогда, когда каждая составляющая её элементарная дизъюнкция (элементарная конъюнкция) содержит некоторую высказывательную переменную x_i вместе с ее отрицанием $\overline{x_i}$.

<u>Доказательство</u> вытекает из Т. 2.1.

Теорема 2.3. Для любой формулы алгебры высказываний существует эквивалентная ей КНФ (ДНФ).

Доказательство проведем для случая КНФ. Пусть задана формула А. Вначале получим для данной формулы А эквивалентную ей приведенную формулу В. Применяя к В дистрибутивный закон, получим КНФ.

Схема приведения формулы к КНФ и ДНФ:



Для облегчения процедуры раскрытия скобок (дистрибутивный закон) можно воспользоваться формальной заменой логических операций на арифметические. Если формула приводится к КНФ, то "$\wedge$" меняется на "+", а "$\vee$" на "$\cdot$", к ДНФ – "$\wedge$" – "$\cdot$", и "$\vee$" – "+". На последнем шаге нужно совершить обратную замену.

Например:

1) Приведите к конъюнктивной нормальной форме (КНФ) $A = (x \to y) \to \overline{y \to z}$.

Решение:

$A = (x \to y) \to \overline{y \to z} \equiv (\bar{x} \vee y) \to \overline{\bar{y} \vee z} \equiv \overline{\bar{x} \vee y} \vee \bar{\bar{y}} \vee \bar{z} \equiv (x \vee \bar{y}) \vee (y \wedge \bar{z})$. Заменим в приведенной формуле "$\wedge$" на "+", "$\vee$" на "$\cdot$" и раскроем скобки: $(x + \bar{y}) \cdot (y + \bar{z}) = x \cdot y + x \cdot \bar{z} + y \cdot \bar{y} + \bar{y} \cdot \bar{z}$.

Сделав обратную замену, получим КНФ формулы A:

$$A \equiv (x \vee y) \wedge (x \vee \bar{z}) \wedge (\bar{y} \vee y) \wedge (\bar{y} \vee \bar{z}) \equiv (x \vee y) \wedge (x \vee \bar{z}) \wedge 1 \wedge (\bar{y} \vee \bar{z}) \equiv (x \vee y) \wedge (x \vee \bar{z}) \wedge (\bar{y} \vee \bar{z}).$$

2) Привести к ДНФ формулу $A = ((x \to y) \to z) \wedge x$.

Решение:

$A = ((x \to y) \to z) \wedge x \equiv ((\bar{x} \vee y) \to z) \wedge x \equiv (\overline{\bar{x} \vee y} \vee z) \wedge x \equiv ((x \wedge \bar{y}) \vee z) \wedge x$ – приведенная формула.

Заменим в приведенной формуле "$\vee$" на "+", "$\wedge$" на "$\cdot$" и раскроем скобки:

$(x\cdot\bar{y}+z)\cdot x = x\cdot\bar{y}\cdot x + z\cdot x$.

Сделав обратную замену, получим ДНФ формулы A:

$A=(x\wedge\bar{y}\wedge x)\vee(z\wedge x)\equiv(x\wedge\bar{y})\vee(z\wedge x)$.

Определение. Элементарная конъюнкция (дизъюнкция) называется полной, если каждая переменная входит в нее один и только один раз.

Например:

Пусть задана система переменных x_1, x_2, x_3, x_4. $\overline{x_1}\vee x_2\vee\overline{x_3}\vee x_4$, $x_1\vee x_2\vee\overline{x_3}\vee x_4$ являются, а $\overline{x_1}\wedge x_2\wedge x_3\wedge\overline{x_4}$, $\overline{x_1}\wedge\overline{x_2}\wedge x_3\wedge x_4$ – полными элементарными конъюнкциями.

Определение. Совершенной конъюнктивной нормальной формой (СКНФ) называется конъюнкция различных полных элементарных дизъюнкций.

Определение. Совершенной дизъюнктивной нормальной формой (СДНФ) называется дизъюнкция различных полных элементарных конъюнкций.

Например:

Пусть задана система переменных x_1, x_2, x_3.

Формула $(x_1\vee\overline{x_2}\vee x_3)\wedge(\overline{x_1}\vee\overline{x_2}\vee\overline{x_3})\wedge(x_1\vee x_2\vee x_3)$ – СКНФ, а

$(x_1\wedge x_2\wedge x_3)\vee(\overline{x_1}\wedge\overline{x_2}\wedge x_3)\vee(x_1\wedge\overline{x_2}\wedge x_3)$ – СДНФ.

Теорема 2.4. Для любой не тождественно истинной (тождественно ложной) формулы алгебры высказываний существует эквивалентная ей СКНФ (СДНФ).

Алгоритм получения СДНФ:

1. Для формулы *A* получаем любую ДНФ.

2. Если в ДНФ есть слагаемое, не содержащее x_i, то заменяем $B \equiv B \wedge \left(x_i \vee \overline{x_i}\right) \equiv \left(B \wedge x_i\right) \vee \left(B \wedge \overline{x_i}\right)$.

3. Если в ДНФ два одинаковых слагаемых *B*, то лишнее можно отбросить, так как $B \vee B \equiv B$.

4. Если в некоторое слагаемое *B* ДНФ *A* x_i входит дважды, то лишнюю x_i можно отбросить, так как $x_i \wedge x_i \equiv x_i$.

5. Если слагаемое *B* в ДНФ *A* содержит конъюнкцию $x_i \wedge \overline{x_i}$, то $x_i \wedge \overline{x_i} \equiv 0$ и $B \equiv 0$, и это слагаемое можно отбросить.

Например: привести к СДНФ формулу $(x \to y \wedge z) \wedge \overline{x}$.

Решение:

$$(x \to y \wedge z) \wedge \overline{x} \equiv \left(\overline{x} \vee y \wedge z\right) \wedge \overline{x} \underset{\substack{\vee - + \\ \wedge - \cdot}}{\equiv} \left(\overline{x} + y \cdot z\right) \cdot \overline{x} \equiv \left(\overline{x} \cdot \overline{x} + y \cdot z \cdot \overline{x}\right) \equiv \left(\overline{x} \wedge \overline{x}\right) \vee \left(y \wedge z \wedge \overline{x}\right) \equiv \overline{x} \vee \left(y \wedge z \wedge \overline{x}\right) \equiv$$

$$\equiv (x \wedge y) \vee \left(x \wedge \overline{y}\right) \vee \left(y \wedge z \wedge \overline{x}\right) \equiv (x \wedge y \wedge z) \vee \left(x \wedge y \wedge \overline{z}\right) \vee \left(x \wedge \overline{y} \wedge z\right) \vee \left(x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z}\right) \vee \left(y \wedge z \wedge \overline{x}\right) \equiv$$

$$\equiv (x \wedge y \wedge z) \vee \left(x \wedge y \wedge \overline{z}\right) \vee \left(x \wedge \overline{y} \wedge z\right) \vee \left(x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z}\right) \vee \left(\overline{x} \wedge y \wedge z\right) \text{- СДНФ}$$

Алгоритм получения СКНФ путем равносильных преобразований похож на алгоритм получения СДНФ:

1. Для формулы *A* получаем любую КНФ.

2. Если элементарная дизъюнкция *B*, входящая в КНФ, не содержит x_i, то $B \equiv B \vee \left(x_i \wedge \overline{x_i}\right) \equiv \left(B \vee x_i\right) \wedge \left(B \vee \overline{x_i}\right)$.

3. если в некоторую элементарную дизъюнкцию *B* входит дважды, то лишнюю переменную x_i можно отбросить, так как $x_i \vee x_i \equiv x_i$.

4. Если КНФ содержит два одинаковых сомножителя *B*, то лишнюю элементарную дизъюнкцию можно отбросить, так как $B \wedge B \equiv B$.

5. Если в элементарную дизъюнкцию *B* входит пара $x_i \vee \overline{x_i}$, то ее можно отбросить, так как $x_i \vee \overline{x_i} = 1$, а $B \wedge 1 \equiv B$.

Например: привести к СКНФ $(x \to y) \wedge (x \to (y \to z))$.

Решение: $(x \to y) \wedge (x \to (y \to z)) \equiv (\bar{x} \vee y) \wedge (\bar{x} \vee (\bar{y} \vee z)) \equiv (\bar{x} \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z) \equiv$
$\equiv (\bar{x} \vee y \vee z) \wedge (\bar{x} \vee y \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)$ - СКНФ

Если же будет задана таблица истинности формулы, то алгоритм построения СДНФ следующий:

1. В таблице истинности отмечаем наборы переменных, для которых значение формулы равно 1.
2. Записываем для каждого отмеченного набора конъюнкцию всех переменных следующим образом: если $x_i = 1$, то конъюнкция включает саму переменную, а противном случае – ее отрицание.
3. Все полученные конъюнкции связываем операциями дизъюнкции.

Получив СДНФ можно восстановить формулы алгебры высказываний.

Например: Задана таблица истинности функции $F(x, y, z)$.

x	y	z	$F(x,y,z)$
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	1

$F(x, y, z) \equiv (x \wedge y \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z})$

Эту формулу можно упростить. Для удобства обозначим $"\wedge" - "\cdot"$.

$$F(x, y, z) \equiv xyz \vee \bar{x}yz \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \equiv yz(x \vee \bar{x}) \vee \bar{x}\bar{z}(y \vee \bar{y}) \vee \bar{x}\bar{y}z \equiv yz \vee \bar{x}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \equiv$$
$$\equiv yz \vee \bar{x}(\bar{z} \vee \bar{y}z) \equiv yz \vee \bar{x}(\bar{z} \vee \bar{y})(\bar{z} \vee z) \equiv yz \vee \bar{x}(\bar{z} \vee \bar{y}) \equiv (yz \vee \bar{x}) \wedge (yz \vee \bar{z} \vee \bar{y}) \equiv ((y \vee \bar{x}) \wedge (z \vee \bar{x})) \wedge$$
$$\wedge (y \vee \bar{z} \vee \bar{y}) \wedge (z \vee \bar{z} \vee \bar{y}) \equiv (y \vee \bar{x}) \wedge (z \vee \bar{x}) \wedge (\bar{z} \vee 1) \wedge (\bar{y} \vee 1) \equiv (y \vee \bar{x}) \wedge (z \vee \bar{x}) \equiv (\bar{x} \vee y) \wedge (\bar{x} \vee z) \equiv$$
$$\equiv \bar{x} \vee (y \wedge z) \equiv x \to y \wedge z.$$

Алгоритм получения СКНФ по таблице истинности:

1. В таблице истинности отмечаем наборы переменных, для которых значение формулы равно 0.
2. Записываем для каждого отмеченного набора дизъюнкцию всех переменных следующим образом: если значение некоторой переменной в

этом наборе равно 0, то в дизъюнкцию включаем саму переменную, а противном случае – ее отрицание.

3. Все полученные дизъюнкции связываем операциями конъюнкции.

Например: Построить формулу по данной таблице истинности

x	*y*	*z*	*A*
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	1

$$A = \left(\overline{x} \vee y \vee \overline{z}\right) \wedge \left(x \vee \overline{y} \vee \overline{z}\right) \wedge \left(x \vee \overline{y} \vee z\right) \wedge \left(x \vee y \vee \overline{z}\right).$$

Проблема разрешимости.

Все формулы алгебр логики делятся на три класса: тождественно истинные (тавтологии), тождественно ложные, выполнимые.

Вопрос, к какому классу формул относится текущая формула *A*, называется проблемой разрешимости.

Алгоритм *A*: Для каждой формулы может быть составлена таблица истинности, содержащая 2^n строк, если в формулу входит и исходит высказывательная переменная.

Другой способ основан на приведении формулы *A* к КНФ и ДНФ и использование специального алгоритма, который позволит определить, является ли данная формула тождественно истинной или нет. Одновременно с этим решается проблема разрешимости.

Алгоритм *B*: Рассматривается формула *A*. Если $A \equiv 1$, то задача решена. Если это не так, то рассматривается формула $\overline{A}$. Если $\overline{A} \equiv 1$, то $A \equiv 0$ и задача решена. Если это не так, то *A* – выполнимая формула.

Установление тождественной истинности формулы *A* основано на теоремах 2.1. и 2.2.

Например: Приведением к нормальным формам установить, является ли формула $A=(x\leftrightarrow y)\vee(x\leftrightarrow z)$ – тождественно истинной, тождественно ложной или выполнимой.

Решение:

$A\equiv((x\to y)\wedge(y\to x))\vee((x\to z)\wedge(z\to x))\equiv((\overline{x}\vee y)\wedge(\overline{y}\vee x))\vee((\overline{x}\vee z)\wedge(\overline{z}\vee x))$ – приведенная формула. Обозначим ее за B и приведем ее к одной из нормальных форм ДНФ или КНФ.

1) ДНФ, обозначим $"\vee"-"+"$, $"\wedge"-"\cdot"$:

$B\equiv(\overline{x}+y)\cdot(\overline{y}+x)+(\overline{x}+z)\cdot(\overline{z}+x)=\overline{x}\cdot\overline{y}+\overline{x}\cdot x+y\cdot\overline{y}+y\cdot x+\overline{x}\cdot\overline{z}+\overline{x}\cdot x+z\cdot\overline{z}+z\cdot x$

Будем иметь

$A=(\overline{x}\wedge\overline{y})\vee(\overline{x}\wedge x)\vee(y\wedge\overline{y})\vee(y\wedge x)\vee(\overline{x}\wedge\overline{z})\vee(\overline{x}\wedge x)\vee(z\wedge\overline{z})\vee(z\wedge x)$.

На основании теоремы 2.2. можно утверждать, что формула A не является тождественно ложной.

2) КНФ, $"\wedge"-"+"$, $"\vee"-"\cdot"$:

$B\equiv(\overline{x}\cdot y+\overline{y}\cdot x)\cdot(\overline{x}\cdot z+\overline{z}\cdot x)\equiv\overline{x}\cdot y\cdot\overline{x}\cdot z+\overline{x}\cdot y\cdot\overline{z}\cdot x+\overline{y}\cdot x\cdot\overline{x}\cdot z+\overline{y}\cdot x\cdot\overline{z}\cdot x$.

Тогда $A\equiv(\overline{x}\vee y\vee\overline{x}\vee z)\wedge(\overline{x}\vee y\vee\overline{z}\vee x)\wedge(\overline{y}\vee x\vee\overline{x}\vee z)\wedge(\overline{y}\vee x\vee\overline{z}\vee x)$.

Согласно теореме 2.2. формула A не является тождественно истинной.

Следовательно формула A – выполнима.

Полные системы булевых функций.

Определение. Система булевых функций $\{f_1, f_2,...f_n\}$ называется полной, если произвольная булева функция может быть выражена через функции $f_1, f_2,...f_n$.

Теорема 2.6. Полной является система функций $\{\wedge,\vee,-\}$.

Теорема 2.7. Пусть система $\{f_1, f_2,...f_n\}$ – полна и любая из функций $f_1, f_2,...f_n$ может быть выражена через функции $q_1, q_2,...q_m$, тогда система $\{q_1, q_2,...q_m\}$ также полна.

Пример: Доказать, что система функций $\{-,\vee\}$ является полной.

Решение:

Пусть $f_1(x_1)=\overline{x_1}$, $f_2(x_1,x_2)=x_1 \vee x_2$, $f_3(x_1,x_2)=x_1 \wedge x_2$, $q_1(x_1)=\overline{x_1}$, $q_2(x_1,x_2)=x_1 \vee x_2$. Выразим f_1, f_2, f_3 через q_1, q_2: $f_1(x_1)=q_1(x_1)$, $f_2(x_1,x_2)=q_2(x_1,x_2)$, $f_3(x_1,x_2)=x_1 \wedge x_2=\overline{\overline{x_1} \wedge \overline{x_2}}=q_1(q_2(q_1(x_1),q_1(x_2)))$.

Любую булеву функцию можно выразить всего лишь через одну функцию. Существует функционально полная система, состоящая только из одних булевых функций.

Определение. Логическая функция штрих Шеффера (и – не) обозначается $x_1 | x_2$ и задается следующей таблицей истинности:

x_1	x_2	$x_1 \| x_2$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Функция штрих Шеффера является полной.

$x_1 | x_2=\overline{x_1} \vee \overline{x_2}$; $x_1 | x_2=\overline{x_1 \wedge x_2}$; $\overline{x_1}=\overline{x_1 \wedge x_2}=x_1 | x_2$;

$x_1 \vee x_2=\overline{\overline{x_1 \vee x_2}}=\overline{\overline{x_1} \vee \overline{x_2}}=x_1 | x_2=(x_1 | x_1)|(x_2 | x_2)$;

$x_1 \wedge x_2=\overline{\overline{x_1 \wedge x_2}}=\overline{x_1 | x_2}=(x_1 | x_2)|(x_1 | x_2)$.

Определение. Логическая функция стрелка Пирса (или – не) обозначается $x_1 \downarrow x_2$ и задается следующей таблицей истинности:

x_1	x_2	$x_1 \downarrow x_2$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

<u>Вопросы и задания.</u>

1. Сколько существует логических функций одной переменной, двух, трех?

2. Привести к дизъюнктивной нормальной форме (ДНФ):

а) $x \to (y \to z)$;

б) $(x \leftrightarrow y) \wedge z$;

в) $((x \to y) \to z) \wedge x$;

г) $(x \leftrightarrow y) \to (y \leftrightarrow z)$;

д) $(x \to y) \leftrightarrow (y \to z)$.

3. Привести к конъюнктивной нормальной форме (КНФ):

а) $(x \to y) \to \overline{y \to z}$;

б) $z \to (x \leftrightarrow y)$;

в) $\overline{x} \to ((x \to y) \to z) \wedge y$;

г) $(x \to (x \leftrightarrow y) \to (y \leftrightarrow z)) \to z$;

д) $z \to ((x \to y) \wedge (x \to y) \to \overline{z})$.

4. Приведите примеры нескольких формул системы x, y, z, представляющих собой СДНФ.

5. Приведите примеры нескольких формул системы x, y, z, представляющих собой СКНФ.

6. Приведением к нормальным формам установить, является ли формула тождественно истинной, тождественно ложной и выполнимой.

а) $(x \to y) \wedge x \to y$;

б) $(x \to y \wedge z) \wedge (z \to x)$;

в) $(x \vee y) \wedge (x \to y) \leftrightarrow \overline{y}$;

г) $(x \to \overline{y}) \wedge x \wedge y$;

д) $(x \to y) \wedge (y \to z) \to (x \to z)$.

7. Привести к совершенной нормальной дизъюнктивной функции (СДНФ), используя равносильные преобразования:

а) $(\overline{x} \vee y) \wedge (x \vee \overline{y})$;

б) $(x \wedge y) \vee (x \wedge \overline{y} \wedge z)$;

в) $(x \to y) \wedge (y \to z)$;

г) $((x \to y) \to z) \to y$;

д) $(x \vee y \leftrightarrow z) \wedge \overline{z}$.

8. Привести к совершенной нормальной конъюнктивной функции (СКНФ), используя равносильные преобразования:

а) $(x \to y) \wedge (x \to (y \to z))$;

б) $\overline{x \to y} \wedge z$;

в) $(x \to y) \to y \wedge z$;

г) $y \to (z \to x \wedge y) \wedge \bar{x}$;

д) $x \vee y \vee z \to (x \vee y) \wedge z$.

9. Для каждой из следующих формул найдите СДНФ с помощью таблицы истинности:

а) $(x \wedge y) \vee z$;

б) $(x \leftrightarrow z) \to (x \wedge \bar{y})$;

в) $((x \wedge \bar{y}) \vee z) \wedge \bar{z}$;

г) $((x \vee y) \to z) \leftrightarrow \bar{x}$;

д) $(x \leftrightarrow y) \wedge (\bar{z} \to (y \wedge \bar{x}))$.

10. Для каждой из следующих формул найдите СДНФ с помощью таблицы истинности:

а) $x \leftrightarrow y$;

б) $(x \vee y) \wedge z$;

в) $x \wedge \overline{(y \wedge (z \to (x \leftrightarrow y)))}$;

г) $\overline{(x \wedge \bar{y})} \wedge (z \leftrightarrow (\bar{x} \wedge y))$;

д) $\overline{x \wedge y} \to \overline{x \vee z}$.

11. Используя СДНФ, найдите формулу, принимающую значения 1 на следующих наборах значений переменных, и только на них.

а) $F(0,0) = F(1,1) = 1$;

б) $F(1,0) = 1$;

в) $F(0,1,0) = F(1,0,1) = F(1,1,1) = 1$;

г) $F(0,1,1) = F(1,1,0) = 1$;

д) $F(0,1) = F(1,0) = F(1,1) = 1$.

12. Используя СКНФ, найдите формулу, принимающую значения 0 на следующих наборах значений переменных, и только на них.

а) $F(0,1) = F(1,1) = 0$;

б) $F(0,1) = 0$;

в) $F(0,1,1) = F(1,1,1) = 0$;

г) $F(0,1) = F(1,0) = F(1,1) = 0$;

д) $F(1,0,0,0,) = F(0,1,1,1) = 0$.

13. Найти формулу, определяющую функцию $F(x, y, z)$ по данной таблице истинности:

x	y	z	$F(x, y, z)$
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	1

14. Докажите, что система $\{-, \wedge\}$ полна.

15. Выразите $\wedge$ и $\vee$ через $\rightarrow$ и $-$, доказав тем самым полноту системы $\{\rightarrow, -\}$.

16. Выразите функции $\wedge, \vee, -$ через стрелку Пирса.